
Aufgabe 1 *(Laplace-Entwicklung)*
Berechnen Sie durch Laplace-Entwicklung die Determinante der Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 *(Kreuzprodukt als lineare Abbildung)*
Betrachten Sie für $\omega \in \mathbb{R}^3$ die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = \omega \times x$.

(1) Zeigen Sie, dass f linear ist.

(2) Berechnen Sie die Matrix F von f bezüglich der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(3) Sei $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Orthonormalbasis mit $\omega = |\omega| v_1$. Wie bildet f diese Basis ab? Geben Sie die zugehörige Matrix an.

Aufgabe 3 *(Kofaktor-Matrix)*
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $t \in (-1, 1)$. Betrachten Sie die Matrix $E_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, deren Element an der Stelle (i, j) gleich 1 ist und Null sonst. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dt} det\,(A + tE_{ij})\,|_{t=0} = cof(A)_{ij}$$

Hinweis. Sie können Aufgabe 3, Serie 1, verwenden.

Aufgabe 4 *(Volumen eines Ellipsoids)*
Betrachten Sie die Menge E aller $x \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, mit

$$\left(\frac{x_1}{\lambda_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)^2 \leq 1 \qquad \text{wobei } \lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0.$$

(1) Zeichnen Sie für $n = 2$, $(\lambda_1, \lambda_2) = (2, 1)$.

(2) Bestimmen Sie $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass $E = \Lambda(B)$ mit $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$.

(3) Berechnen Sie das Volumen $V(E)$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 6.5.2013, vor der Vorlesung.